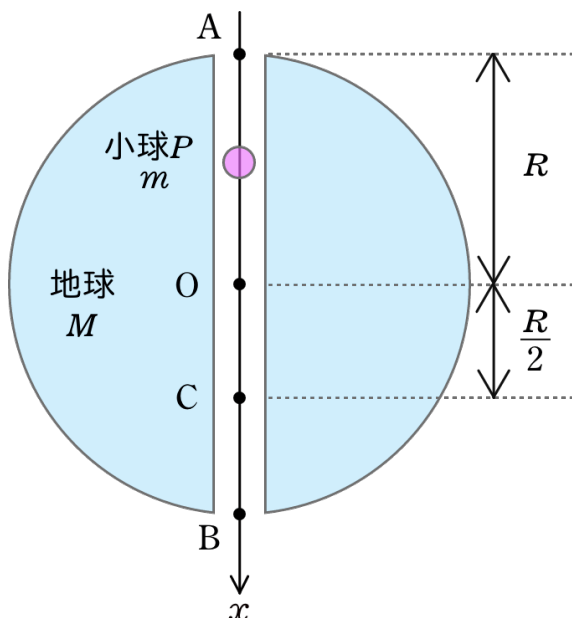


☆力学 14【地球貫通トンネル】

図のように、地球の中心 O を通り、地表にある点 A と点 B を結ぶ細長いトンネル内における質量 m の小球の直線運動を考える。 O を原点に図のように x 軸をとり、地球を質量 M 、半径 R の一様な球とみなし、万有引力定数を G として、以下の [I], [II] の各問いに答えよ。

ただし、地球の自転と公転の影響、トンネルと小球の間の摩擦および空気抵抗は無視するものとし、地球の質量は小球の質量に比べて十分大きいので地球は固定されているものとみなしてよい。



[I]

質量 m の小球 P を点 A で静かにはなすと小球 P は AB 間で単振動を始めた。この単振動の周期についての以下の文章の空欄に適当な式を入れよ。

地球の中心 O から距離 $r(r < R)$ の位置において P が地球から受ける万有引力の大きさは、中心 O から距離 r 以内にある地球の部分の質量が中心 O に集まったと仮定したときに P が受ける万有引力に等しい。地球全体の体積は $\frac{4}{3}\pi R^3$ であり、地球の中心から距離 r 以内にある地球の部分の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ であることから、地球の中心から距離 r 以内にある地球の部分の質量 M' は $M' = \boxed{(1)}$ である。よって、 P が任意の位置 $x(-R < x < R)$ で受ける合力 F は

$F = -\boxed{(2)}$ である。単振動の運動方程式より P の単振動の角振動数 ω は $\omega = \boxed{(3)}$ となり、周期 T は $T = \boxed{(4)}$ となる。

[II]

次に時刻 $t = 0$ に質量 m の小球 P を点 A で静かにはなし，その後時刻 t_1 (ただし， $t_1 < T$) に質量 m の小球 Q を同じく点 A で静かにはなしたところ，P と Q は OB の中点 C ($x = \frac{R}{2}$) で衝突した。ここで，P と Q の衝突は弾性衝突 ($e = 1$) であるとする。

(5) t_1 を T を用いて表せ。

(6) その後，P と Q は AB 間で衝突を繰り返す。その衝突の時刻と，位置がどのようなようになるか説明せよ。

